2.3 Un repaso de notación de conjuntos

Para continuar con un desarrollo ordenado de la teoría de probabilidad, necesitamos algunos conceptos básicos de teoría de conjuntos. Usaremos letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$, para denotar conjuntos de puntos. Si los elementos del conjunto A son a_1, a_2 y a_3, escribiremos

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Denotemos con S el conjunto de todos los elementos en consideración; esto es, S es el *conjunto universal.* Para dos conjuntos cualesquiera A y B, diremos que A es un *subconjunto* de B, o A está contenido en B (denotado $A \subset B$), si todo punto en A también está en B. El *conjunto nulo*, o *vacío*, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene puntos. Entonces, $\varnothing$ es un subconjunto de todo conjunto.

Los conjuntos y las relaciones entre conjuntos se pueden representar en forma conveniente con el uso de *diagramas de Venn.* El diagrama de Venn de la Figura 2.2 muestra dos conjuntos, A y B, del conjunto universal S. El conjunto A es el conjunto de todos los puntos dentro del triángulo; el conjunto B es el conjunto de todos los puntos dentro del círculo. Observe que en la Figura 2.2, $A \subset B$.

Considere ahora dos conjuntos arbitrarios de puntos. La *unión* de A y B, denotada por $A \cup B$, es el conjunto de todos los puntos en A o B o en ambos. Esto es, la unión de A y B contiene todos los puntos que están en al menos uno de los conjuntos. El diagrama de Venn de la Figura 2.3 muestra dos conjuntos A y B, donde A es el conjunto de puntos en el círculo

FIGURA **2.2** Diagrama de Venn para $A \subset B$

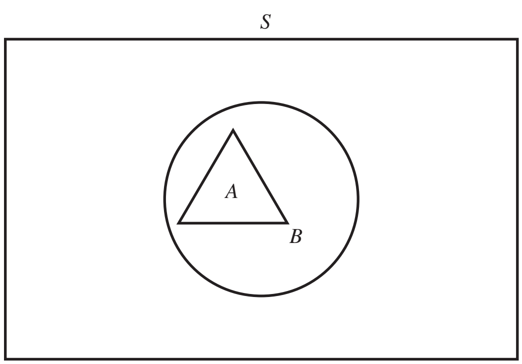
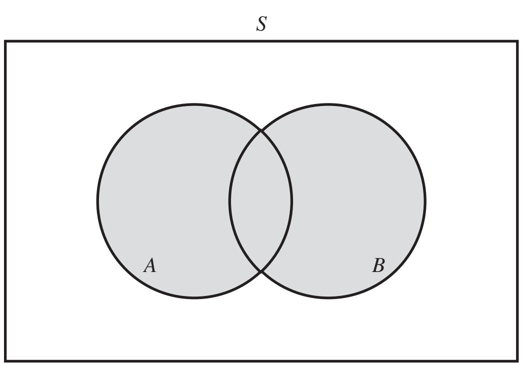


FIGURA **2.3** Diagrama de Venn para $A \cup B$



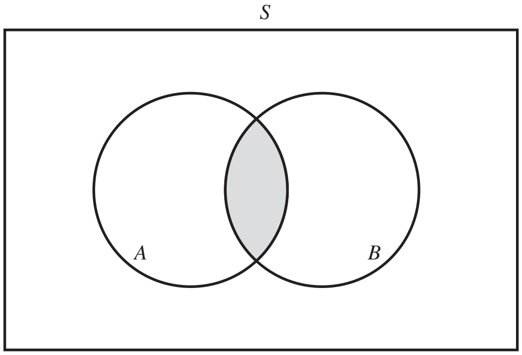


FIGURA **2.4**
Diagrama de Venn para *AB*

izquierdo y B es el conjunto de puntos en el círculo derecho. El conjunto $A \cup B$ es la región sombreada formada por todos los puntos dentro de cualquiera de los círculos (o de ambos). La palabra clave para expresar la unión de dos conjuntos es *o* (que significa A o B o ambos).

La *intersección* de A y B, denotada por $A \cap B$ o por AB, es el conjunto de todos los puntos en A y B. El diagrama de Venn de la Figura 2.4 muestra dos conjuntos A y B, con $A \cap B$ formado por los puntos en la región sombreada donde los dos conjuntos se traslapan. La palabra clave para expresar intersecciones es *y* (que significa A y B *simultáneamente*).

Si A es un subconjunto de S, entonces el *complemento* de A, denotado por $\overline{A}$, es el conjunto de puntos que están en S pero no en A. La Figura 2.5 es un diagrama de Venn que ilustra que el área sombreada en S pero no en A es $\overline{A}$. Observe que $A \cup \overline{A} = S$.

Se dice que dos conjuntos, A y B, son *disjuntos* o *mutuamente excluyentes*, si $A \cap B = \emptyset$. Esto es, los conjuntos mutuamente excluyentes no tienen puntos en común. El diagrama de Venn de la Figura 2.6 ilustra dos conjuntos A y B que son mutuamente excluyentes. Examinando la Figura 2.5 es fácil ver que, para cualquier conjunto A, A y $\overline{A}$ son mutuamente excluyentes.

Considere el problema de la Sección 2.2 de lanzar un dado y denote con S el conjunto de todas las posibles observaciones numéricas para un solo tiro de un dado. Esto es, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Sea $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$ y $C = \{2, 4, 6\}$. Entonces $A \cup B = \{1, 2, 3\}$, $A \cap B = \{1\}$ y $\overline{A} = \{3, 4, 5, 6\}$. Del mismo modo, observe que B y C son mutuamente excluyentes, mientras que A y C no lo son.

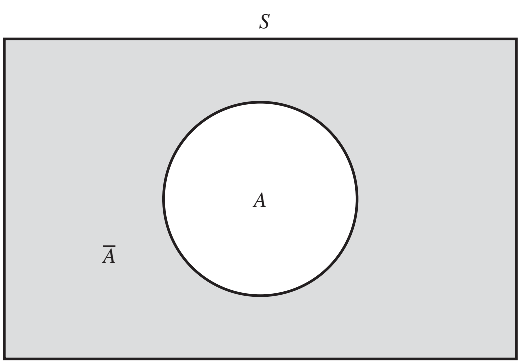


FIGURA **2.5**
Diagrama de Venn para $\overline{A}$

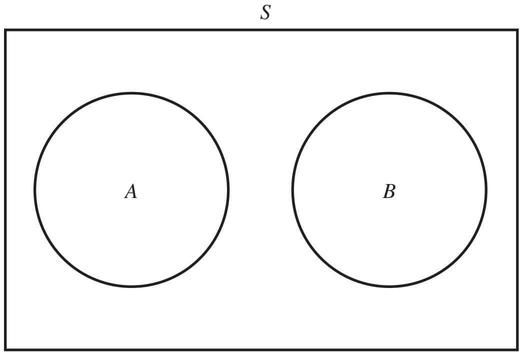


FIGURA 2.6 Diagrama de Venn para los conjuntos A y B mutuamente excluyentes

No trataremos de hacer aquí un repaso a fondo de álgebra de conjuntos, pero mencionamos cuatro igualdades de considerable importancia. Éstas son las *leyes distributivas*, dadas por

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

y las *leyes* de *DeMorgan:*

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{y} \quad \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

En la siguiente sección continuaremos con una exposición elemental de la teoría de probabilidad.

Ejercicios

2.1 Suponga que una familia contiene dos hijos de edades diferentes y estamos interesados en el género de estos niños. Denotemos con F que una hija es mujer y M que el hijo es hombre y denote con un par, por ejemplo FM, que el hijo de mayor edad es la niña y el más joven es el niño. Hay cuatro puntos en el conjunto S de posibles observaciones:

$$S = \{FF, FM, MF, MM\}.$$

Denote con A el subconjunto de posibilidades que no contenga hombres; B, el subconjunto que contiene dos hombres; y C, el subconjunto que contenga al menos un hombre. Indique los elementos de $A, B, C, A \cap B, A \cup B, A \cap C, A \cup C, B \cap C, B \cup C$ y $C \cap \overline{B}$.

2.2 Suponga que A y B son dos eventos. Escriba las expresiones que contengan uniones, intersecciones y complementos que describan lo siguiente:

a Ocurren ambos eventos.

b Al menos uno ocurre.

c Ninguno ocurre.

d Exactamente uno ocurre.

2.3 Trace diagramas de Venn para verificar las leyes de DeMorgan. Esto es, para dos conjuntos cualesquiera A y B, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.4 Si A y B son dos conjuntos, dibuje diagramas de Venn para verificar lo siguiente:

a $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
b Si $B \subset A$ entonces $A = B \cup (A \cap \overline{B})$.

2.5 Consulte el Ejercicio 2.4. Use las identidades $A = A \cap S$ y $S = B \cup \overline{B}$ y una ley distributiva para demostrar que

a $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.
b Si $B \subset A$ entonces $A = B \cup (A \cap \overline{B})$.
c Además, demuestre que $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$ son mutuamente excluyentes y que, por tanto, A es la unión de dos conjuntos mutuamente excluyentes, $(A \cap B)$ y $(A \cap \overline{B})$
d También demuestre que B y $(A \cap \overline{B})$ son mutuamente excluyentes y, si $B \subset A$, A es la unión de dos conjuntos mutuamente excluyentes, B y $(A \cap \overline{B})$.

2.6 Suponga que se tiran dos dados y que se observan los números de las caras superiores. Denotemos con S el conjunto de todos los pares posibles que se pueden observar. [Estos pares se pueden indicar, por ejemplo, si con (2, 3) se denota que un 2 se ha observado en el primer dado y un 3 en el segundo.]

a Defina los siguientes subconjuntos de S:

A: el número en el segundo dado es par.

B: la suma de los dos números es par.

C: al menos un número del par es impar.

b Indique los puntos en A, $\overline{C}$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$ y $\overline{A} \cap C$.

2.7 Un grupo de cinco solicitantes para un par de trabajos idénticos está formado por tres hombres y dos mujeres. El empleador ha de seleccionar dos de los cinco solicitantes para los trabajos. Denote con S el conjunto de todos los resultados posibles para la selección del empleador. Denote con A al subconjunto de resultados correspondientes a la selección de dos hombres y con B al subconjunto correspondiente a la selección de al menos una mujer. Indique los resultados en A, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$ y $A \cap \overline{B}$. Denote los hombres y mujeres diferentes con M_1, M_2, M_3 y W_1, W_2, respectivamente.)

2.8 De una encuesta de 60 estudiantes que asisten a clase en una universidad, se encontró que 9 vivían fuera del campus, 36 eran pasantes y 3 eran pasantes que vivían fuera del campus. Encuentre el número de estos estudiantes que

a eran pasantes, vivían fuera del campus o ambos.
b eran pasantes que vivían en el campus.
c eran graduados que vivían en el campus.

2.4 Un modelo probabilístico para un experimento: el caso discreto

En la Sección 2.2 nos referimos al *experimento* de lanzar un dado cuando observamos el número que aparecía en la cara superior. Usaremos el término *experimento* para incluir observaciones obtenidas de situaciones incontrolables por completo (por ejemplo observaciones en el precio diario de una acción en particular) así como aquellas hechas en condiciones controladas de laboratorio. Tenemos la siguiente definición: